

SONDERFORSCHUNGSBEREICH – TRANSREGIO 195: SYMBOLISCHE WERKZEUGE IN DER MATHEMATIK UND IHRE ANWENDUNG



Das klassische Bild des Arbeitsplatzes einer Mathematikerin oder eines Mathematikers, Bücher, viel Papier und ein gut gespitzter Bleistift, insbesondere, wenn es sich um Forschung in der sogenannten reinen Mathematik handelt: Diese Zeiten sind lange vorbei – zumindest im Sonderforschungsbereich 195 „Symbolische Werkzeuge in der Mathematik und ihre Anwendung“. Heutzutage ist reine Mathematik auch eine experimentelle Wissenschaft. Die Experimente finden hier nicht im Labor statt, sondern am Computer. Aber es gibt einen wesentlichen Unterschied zu anderen experimentellen Wissenschaften: Mathematische Sätze können mit Hilfe von Computern bewiesen werden, etwa wenn nur endlich viele Fälle zu untersuchen sind.

Die Forscher des SFB 195 haben wesentliche Beiträge zur Mathematik und zu mathematischer Software in den Kerngebieten des SFB geleistet: Darstellungstheorie, Zahlentheorie, algebraische und tropische Geometrie und Zufallsmatrizen. Die dabei verwendeten Methoden sind in den ersten vier Bereichen rein algebraisch, die auftretenden mathematischen Probleme werden exakt gelöst. Das hat ganz praktische Vorteile. Statt einer notwendigerweise ungenauen Näherung etwa der Wurzel von zwei rechnet man symbolisch stattdessen mit dem Zeichen $\sqrt{2}$ und seinen Eigenschaften – ganz exakt. Für Computeralgebra gibt es viele Anwendungen. Zum Beispiel in der Robotik, in der Verschlüsselung im Internet (Kryptographie), in der Datenübertragung (Kodierungstheorie) oder in der Verifikation von Schaltungen auf Computerchips.

Gemeinsam sind wir stark – das gilt für den SFB 195 in doppelter Hinsicht. Zum einen bei der Entwicklung von Algorithmen in der Computeralgebra. So manches Problem, das beispielsweise bereits in den Systemen der Zahlentheorie gelöst worden ist, tritt in leicht anderem Gewand auch in der algebraischen Geometrie auf. Da ergeben sich

große Synergien, wenn nun die Experten der Computeralgebra aus beiden Welten zusammenarbeiten. Dafür ist die TU Kaiserslautern der ideale Ort. Hier gibt es eine langjährige Tradition in der Entwicklung weltweit führender Computeralgebrasysteme --- mit SINGULAR sei sein prominentester Vertreter genannt. Algebraische Algorithmen eröffnen ein ganzes Spektrum neuer Zugangsmöglichkeiten zu den klassischen Schlüsselgebieten der Mathematik.

Gemeinsam sind wir stark. Zum anderen zeigt sich das dadurch, dass im SFB 195 die bestehenden Systeme in ein neues umfassendes Computeralgebrasystem OSCAR (Open Source Computer Algebra Research) integriert werden. Damit wird ein System der nächsten Generation erreicht werden. Ziel ist es, durch dieses Werkzeug die weltweite mathematische Forschung nachhaltig zu bereichern.

Im ersten Schritt – noch in dieser Förderperiode des SFB – wird es bereits viele Fortschritte in der theoretischen Forschung durch Nutzung der neuen Systeme rund um OSCAR geben: Zum Beispiel in der Darstellungstheorie. Gruppendarstellungen ermöglichen die Beschreibung von Symmetrien, sei es von realen oder von mathematischen Objekten. Im SFB werden wichtige Teilklassen von Gruppen und ihre Darstellungen algorithmisch untersucht, konstruiert und in Datenbanken erfasst.

| $SL_2(q)$ | C_1 | C_2 | $C_3(a)$ | $C_4(b)$ |
|-------------|---------|-------|----------------------------|-------------------------|
| χ_1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ_2 | q | 0 | 1 | -1 |
| $\chi_3(n)$ | $q + 1$ | 1 | $\zeta^{an} + \zeta^{-an}$ | 0 |
| $\chi_4(m)$ | $q - 1$ | -1 | 0 | $-\xi^{bm} - \xi^{-bm}$ |

Charaktertafel von $SL_2(q)$, q gerade

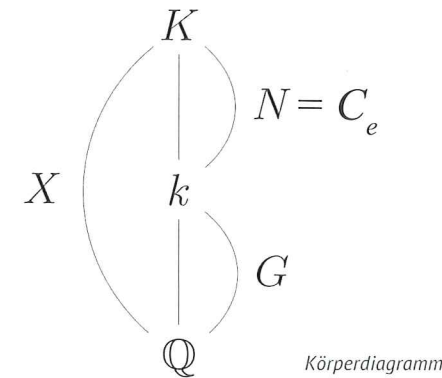
Das Anliegen der algebraischen Geometrie ist die Erforschung der Lösungen polynomialer Gleichungssysteme. Diese finden sich überall in der Mathematik sowie in deren Anwendungsgebieten.

Sie beschreiben etwa das Verhalten von Robotern, physikalische Modelle in der Stringtheorie oder Evolutionsmodelle in der Biologie. Im Rahmen des SFB werden zentrale, hochabstrakte Querverbindungen konstruktiv aufbereitet und damit berechenbar gemacht.



Barth Sextic: Beispiel der Lösungsmenge einer polynomialen Gleichung, Bild: Böhm

Die Zahlentheorie wurde früher als Königin der reinen Mathematik bezeichnet. Heute ist sie die Grundlage für moderne Verschlüsselungsverfahren in der elektronischen Kommunikation. Im Rahmen des SFB werden Werkzeuge entwickelt, um Zahlkörper mit auflösbaren Automorphismengruppen zu konstruieren, ein Problem mit einer über 200-jährigen Geschichte.



Die tropische Geometrie ist ein modernes Forschungsgebiet, in dem algebraische Berechnungen mit Polytopen zusammengebracht werden, wie etwa Würfel oder Tetraeder. Im SFB sind bereits Methoden entwickelt worden, um den Sekundärfächer eines Polytops zu berechnen; in einem wichtigen Fall, der bisherige Programme aufgrund der schieren Größe sprengte, besteht er aus 92.487.256 Teilen.

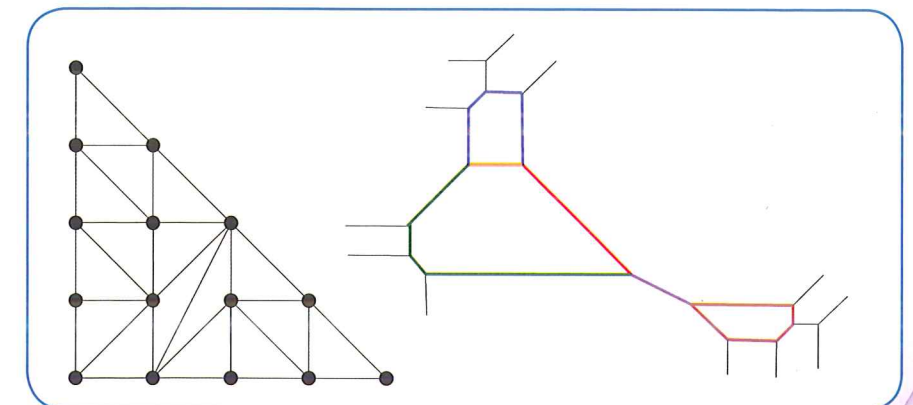
Im fünften Kerngebiet werden Algorithmen zur Behandlung von nicht-kommutativen Algebren und Zufallsmatrizen entwickelt – diese bilden den mathematischen Rahmen für moderne Herausforderungen im Zusammenhang mit Quan-

tencomputern oder Big Data. Wesentlich ist dabei auch das Aufspüren von neuen, nicht klassischen Symmetrien, welche mathematisch durch Quantengruppen realisiert werden.

Die gemeinsame Forschung beruht auf der überaus engen Kooperation unserer drei Hauptstandorte – der hiesigen Sprecherhochschule sowie der RWTH Aachen und der Universität des Saar-

den gehen zweimal jährlich gemeinsam in Klausur, es gibt eine Sommerschule und weitere Veranstaltungen für den wissenschaftlichen Nachwuchs. Mehr dazu findet man auf unserer Homepage <https://www.computeralgebra.de/sfb/>.

Und wer uns mal ganz anders kennenlernen will: Beim diesjährigen Uni-Waldlauf werden wir fast geschlossen antreten, zu erkennen an unseren SFB-Shirts.



Duale Newtonunterteilung und ebene tropische Kurve

landes. Neben gemeinsamen Tagungen und Seminaren bildet die integrierte Graduiertenschule eine starke Klammer; unsere Doktorandinnen und Doktoran-

Prof. Dr. Gunter Malle,
Dr. Michael Kunte

| $A_1(4), A_1(5)$ | $A_2(2)$ | | | | | | | | | | | |
|-------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|---------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------|----------------|
| A_5 | $A_1(7)$ | | | | | | | | | | | |
| 60 | 168 | | | | | | | | | | | |
| $A_1(9), B_2(2)'$ | ${}^2G_2(3)'$ | | | | | | | | | | | |
| A_6 | $A_1(8)$ | | | | | | | | | | | |
| 360 | 504 | | | | | | | | | | | |
| A_7 | $A_1(11)$ | $E_6(2)$ | $E_7(2)$ | $E_8(2)$ | $F_4(2)$ | $G_2(3)$ | ${}^3D_4(2^3)$ | ${}^2E_6(2^2)$ | ${}^2B_2(2^3)$ | Tits* | ${}^2F_4(2)'$ | ${}^2G_2(3^3)$ |
| 2520 | 660 | 214 841 575 522 005 575 270 400 | 7 907 074 042 075 790 709 808 487 262 408 902 915 486 | 108 060 761 041 008 216 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 | 3 311 126 603 366 400 | 4 245 696 | 211 341 312 | 76 532 479 683 774 853 939 200 | 29 120 | 17 971 200 | 10 073 444 472 | |
| $A_3(2)$ | $A_1(13)$ | $E_6(3)$ | $E_7(3)$ | $E_8(3)$ | $F_4(3)$ | $G_2(4)$ | ${}^3D_4(3^3)$ | ${}^2E_6(3^2)$ | ${}^2B_2(2^5)$ | ${}^2F_4(2^3)$ | ${}^2G_2(3^5)$ | |
| 20 160 | 1 092 | 7 207 703 147 543 643 230 028 328 989 218 443 200 | 1 271 376 326 918 536 742 240 075 712 139 616 616 018 070 203 770 706 204 017 395 200 | 108 060 761 041 008 216 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 | 5 734 420 792 816 6 71 844 761 600 | 251 596 800 | 20 560 831 566 912 | 14 626 833 976 919 470 423 965 328 640 132 877 400 | 32 537 600 | 264 905 352 699 586 176 614 400 | 49 825 657 439 340 552 | |
| A_9 | $A_1(17)$ | $E_6(4)$ | $E_7(4)$ | $E_8(4)$ | $F_4(4)$ | $G_2(5)$ | ${}^3D_4(4^3)$ | ${}^2E_6(4^2)$ | ${}^2B_2(2^7)$ | ${}^2F_4(2^5)$ | ${}^2G_2(3^7)$ | |
| 181 440 | 2 448 | 85 529 789 793 342 640 185 833 419 085 142 764 646 746 400 400 | 11 011 011 011 011 011 011 075 712 139 616 616 018 070 203 770 706 204 017 395 200 | 108 060 761 041 008 216 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 | 19 009 825 529 840 945 431 297 669 120 000 | 5 859 000 000 | 67 802 350 642 790 400 | 85 529 789 793 342 640 485 906 772 387 044 953 493 348 800 400 | 34 093 383 680 | 1 119 433 155 799 391 447 702 164 409 762 722 348 000 | 239 189 910 264 352 349 332 632 | |
| A_n | $PSL_{n+1}(q), L_{n+1}(q)$ | $E_6(q)$ | $E_7(q)$ | $E_8(q)$ | $F_4(q)$ | $G_2(q)$ | ${}^3D_4(q^3)$ | ${}^2E_6(q^2)$ | ${}^2B_2(2^{2n+1})$ | ${}^2F_4(2^{2n+1})$ | ${}^2G_2(3^{2n+1})$ | |
| $\frac{n!}{2}$ | $\frac{q^{2n+1}-1}{(q-1)} \prod_{i=1}^n (q^{2i}-1)$ | $\frac{q^{2n}(q^2-1)(q^2-1)(q^2-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^2-1)}$ | $\frac{q^{2n}(q^2-1)(q^2-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ | $\frac{q^{2n}(q^2-1)(q^2-1)(q^2-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^2-1)}$ | $\frac{q^{2n}(q^2-1)(q^2-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ | $q^n(q-1)(q^2-1)$ | $\frac{q^{2n}(q^2-1)(q^2-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ | $\frac{q^{2n}(q^2-1)(q^2-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ | $q^{2n+1}(q-1)$ | $\frac{q^{2n+1}(q^2-1)(q^2-1)}{(q-1)(q^2-1)}$ | $q^{2n+1}(q-1)$ | |

Periodensystem endlicher einfacher Gruppen, Ausschnitt, Bild: © 2012 Ivan Andrus